Gebrochen-rationale Funktionen mit Parameter II
Übung

Betrachtet werden die gebrochen - rationalen Funktionen $f_b: x \mapsto f_b(x)$ mit

$$f_b(x) = \frac{-x^2 - bx + b}{2 - x} \text{ mit } b \in \mathbb{R}$$

in der von b unabhängigen Definitionsmenge $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

a) Bestimmen Sie den Wert des Parameters b so, dass die Definitionslücke der zugehörigen Funktion f_b stetig hebbar ist. Geben Sie für diesen Wert von b den Term der stetigen Fortsetzung $\tilde{f}_b$ von f_b an! (4 BE)

b) Bestimmen Sie Lage, Anzahl und Vielfachheit der Nullstellen von f_b in Abhängigkeit von b. (8 BE)

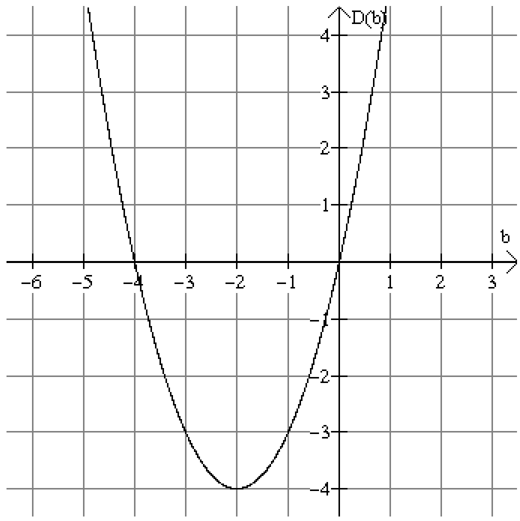
c) Zeigen Sie: Für $b = -1$ berührt die Gerade $g: y = -2x + 1$ den Graphen der zugehörigen Funktion f_b an der Stelle $x_0 = 1$. (5 BE)

d) Sei nun $b = -1$. Geben Sie die Gleichungen aller Asymptoten des Graphen von f_{-1} an. (4 BE)

Gebrochen – rationale Funktionen mit Parameter II
Lösung

a) $z(2) = 0;$
$-4 - 2b + b = 0$
$b = -4$
$$\Rightarrow f_4(x) = \frac{-x^2 + 4x - 4}{2 - x} = \frac{-(x-2)^2}{-(x-2)}$$
$$\Rightarrow \tilde{f}_4(x) = \frac{(x-2)^2}{x-2} = x - 2$$

b) $f_4(x) = 0; -x^2 - bx + b = 0$
$x_{1/2} = \frac{b \pm \sqrt{b^2+4b}}{-2}$



1. Fall: $b < -4$
Zwei einfache Nullstellen
$$x_1 = \frac{b - \sqrt{b^2 + 4b}}{-2}$$
$$x_2 = \frac{b + \sqrt{b^2 + 4b}}{-2}$$

2. Fall: $b = -4$
$$x_{1/2} = -\frac{b}{2} = 2 \notin D_{max}$$
keine Nullstelle

3. Fall: $-4 < b < 0$
keine Nullstelle

4. Fall: $b = 0$
$x_{1/2} = 0$
eine doppelte Nullstelle

5. Fall: $b > 0$
Zwei einfache Nullstellen,
vgl. Fall 1

c) $f_{-1}(x) = g(x)$
$\frac{-x^2+x-1}{2-x} = -2x + 1$
$-x^2 + x - 1 = (-2x + 1)(2 - x)$
$-x^2 + x - 1 = -4x + 2x^2 + 2 - x$
$3(x^2 - 2x + 1) = 0$
$3(x-1)^2 = 0$
doppelte Lösung bei $x_3 = 1$, also Berührstelle.

d) $f_{-1}(x) = \frac{-x^2+x-1}{2-x}$
Senkrechte Asymptote bei $x = 2$
Schräge Asymptote: $(-x^2 + x - 1):(-x + 2) = x + 1 - \frac{3}{-x+2}$, d.h. $y = x + 1$.